GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Thầy: **Lâm Tấn Dũng**

<u>Mở đầu</u>

Hình học không gian là môn học khó đối với nhiều học sinh, nhưng nếu biết đưa ra phương pháp giải cho từng dạng toán, kiên trì hướng dẫn học sinh thực hiện theo đúng phương pháp đó, thì việc học và giải toán hình học không gian sẽ đỡ khó hơn rất nhiều và mỗi học sinh đều có thể học và giải những đề thi đại học phần hình học không gian một cách nhẹ nhàng.

❑ Một số phương pháp giải toán Hình Học Không Gian

❑ <u>BÀI TOÁN 1:</u> ***Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.***

❑ <u>Phương pháp:</u>

<u>Cách 1</u> ***Tìm 2 điểm chung của 2 mặt phẳng đó.***

- Điểm chung thứ nhất thường dễ thấy.
- Điểm chung thứ hai là giao điểm của 2 đường thẳng còn lại, không qua điểm chung thứ nhất.

<u>Cách 2</u>

Nếu trong 2 mặt phẳng có chứa 2 đường thẳng // thì chỉ cần tìm 1 điểm chung, khi đó giao tuyến sẽ đi qua điểm chung và // với 2 đường thẳng này.

❑ <u>BÀI TOÁN 2:</u> ***Tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P)***

❑ <u>Phương pháp:</u>

- Ta tìm giao điểm của a với một đường thẳng b nào đó nằm trong (P).
- Khi không thấy đường thẳng b, ta thực hiện theo các bước sau:

1 . Tìm một mp(Q) chứa a.

2 . Tìm giao tuyến b của (P) và (Q).

3 . Gọi: $A = a \cap b$ thì: $A = a \cap (P)$.

❑ <u>BÀI TOÁN 3:</u> ***Chứng minh 3 điểm thẳng hàng.***

❑ <u>Phương pháp:</u>

Để chứng minh 3 điểm hay nhiều hơn 3 điểm thẳng hàng ta chứng minh các điểm ấy thuộc 2 mặt phẳng phân biệt.

❑ <u>BÀI TOÁN 4:</u> ***Chứng minh 3 đường thẳng a, b, c đồng quy.***

❑ <u>Phương pháp:</u>

<u>Cách 1:</u>

Ta chứng minh giao điểm của 2 đường thẳng này là điểm chung của 2 mp mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.

- Tìm $A = a \cap b$.
- Tìm 2 mp (P), (Q), chứa A mà $(P) \cap (Q) = c$.

<u>Cách 2:</u>

Ta chứng minh: a, b, c không đồng phẳng và cắt nhau từng đôi một.

❑ BÀI TOÁN 5: ***Tìm tập hợp giao điểm M của 2 đường thẳng di động a, b.***

❑ Phương pháp:

- Tìm mp(P) cố định chứa a.
- Tìm mp(Q) cố định chứa b.
- Tìm $c = (P) \cap (Q)$. Ta có $M \in c$.
- Giới hạn.

❑ BÀI TOÁN 6: ***Dựng thiết diện của mp(P) và một khối đa diện T.***

❑ Phương pháp:

Muốn tìm thiết diện của mp(P) và khối đa diện T, ta đi tìm **đoạn giao tuyến** của mp(P) với các mặt của T. Để tìm giao tuyến của (P) với các mặt của T, ta thực hiện theo các bước:

1 . Từ các điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của T.

2. Kéo dài giao tuyến đã có, tìm giao điểm với các cạnh của mặt này từ đó làm tương tự ta tìm được các giao tuyến còn lại, cho tới khi các đoạn giao tuyến khép kín ta sẽ có thiết diện cần dựng.

❑ BÀI TOÁN 7: ***Chứng minh một đường thẳng a đi qua 1 điểm cố định.***

❑ Phương pháp:

Ta chứng minh: $a = (P) \cap (Q)$ trong đó (P) là một mặt phẳng cố định và (Q) di động quanh một đường thẳng b cố định. Khi đó a đi qua: $I = (P) \cap b$.

❑ BÀI TOÁN 8: ***Chứng minh 2 đường thẳng a, b song song.***

❑ Phương pháp:

□ **Cách 1**

Ta chứng minh: a , b đồng phẳng rồi áp dụng các phương pháp chứng minh // trong hình học phẳng như: Ta lét, đường trung bình, … để chứng minh: $a \,//\, b$.

□ **Cách 2**

Chứng minh: a, b cùng // với một đường thẳng thứ ba c.

□ **Cách 3**

Áp dụng định lý về giao tuyến: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và lần lượt chứa hai đường thẳng song song cho trước thì giao tuyến của chúng cùng phương với 2 đường thẳng ấy.

❑ BÀI TOÁN 9: ***Tìm góc giữa 2 đường thẳng chéo nhau a, b.***

❑ Phương pháp:

- Lấy một điểm O tùy ý.
- Qua O dựng $c \,//\, a$, $d \,//\, b$.
- Góc nhọn tạo bởi c và d là góc giữa 2 đường thẳng a, b.

□ **Chú ý:** Ta nên chọn O thuộc a hoặc b khi đó ta chỉ cần vẽ một đường thẳng // với đường còn lại

❑ BÀI TOÁN 10: ***Chứng minh đường thẳng a song song với mp(P).***

❑ Phương pháp:

□ **Cách 1**

Ta chứng minh: a // với một đường thẳng $b \subset (P)$. Khi không thấy được b ta làm theo các bước:

- Tìm một mp(Q) chứa a.
- Tìm $b = (P) \cap (Q)$.
- Chứng minh: $b \,//\, a$.

□ **Cách 2**

Chứng minh: $a \subset (Q) \,//\, (P)$.

❑ BÀI TOÁN 11: ***Dựng thiết diện song song với một đương thẳng a cho trước.***

❑ Phương pháp:

Ta dựa vào tính chất: *Mặt phẳng song song với đường thẳng a, nếu cắt mặt phẳng nào chứa a thì sẽ cắt theo giao tuyến song song với a.*

❑ BÀI TOÁN 12: ***Chứng minh 2 mặt phẳng song song.***

❑ Phương pháp:

Chứng minh mặt phẳng này chứa 2 đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với 2 đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia.

❑ BÀI TOÁN 13: ***Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng song song với một mp cho trước.***

❑ Phương pháp:

Dựa vào Định lý: Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bởi một mp thứ ba thì 2 giao tuyến // nhau.

❑ BÀI TOÁN 14: ***Chứng minh 2 đường thẳng $\perp$ nhau.***

❑ Phương pháp:

□ **Cách 1**

Chứng minh đường thẳng này $\perp$ với mặt phẳng chứa đường kia.

□ **Cách 2**

Nếu 2 đường thẳng cắt nhau thì sử dụng các phương pháp đã dùng trong hình học phẳng để chứng minh.

□ **Cách 3**

Dùng Vectơ.

❑ BÀI TOÁN 15: ***Chứng minh đường thẳng a $\perp$ mặt phẳng (P).***

❑ Phương pháp:

□ **Cách 1**

Chứng minh: $a \perp$ với 2 đường thẳng cắt nhau nằm trong (P).

□ **Cách 2**

Chứng minh a là trục của mp(P) (Tức là chứng minh: $MA = MB = MC$, $NA = NB = NC$ với $M, N \in a$, $A, B, C \in$ (P)).

□ **Cách 3**

Chứng minh: $a \subset (Q) \perp (P)$ và $a \perp b = (P) \cap (Q)$.

□ **Cách 4**

Chứng minh a là giao tuyến của 2 mặt phẳng cùng $\perp$ (P).

❑ BÀI TOÁN 16: ***Dựng thiết diện của mp(P) qua một điểm A cho trước và $\perp$ đường thẳng a cho trước.***

❑ Phương pháp:

□ **Cách 1**

Nếu có 2 đường thẳng: b, c cắt nhau hay chéo nhau cùng $\perp$ với a thì: (P) // a (hay chứa a), (P) // b (hay chứa b) ta đưa việc dựng thiết diện về phần //.

□ **Cách 2**

Dựng mp(P) như sau: Dựng 2 đường thẳng cắt nhau: b, c cùng $\perp a$, b hoặc c qua A, (P) = mp(b, c).

❑ BÀI TOÁN 17: ***Dựng đường thẳng a qua A cho trước và $\perp$ mp(P) cho trước. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.***

❑ Phương pháp:

1 . Chọn trong (P) đường thẳng d.

2. Tìm mp(Q) qua A và $\perp d$. (Tức là tìm 2 đường thẳng cắt nhau $\perp d$ trong đó có 1 đường thẳng qua A)

3 . Tìm: $c = (P) \cap (Q)$.

4 . Dựng: $AH \perp c$ tại H. AH là đường thẳng qua A và $\perp$ (P), $AH = d[A, (P)]$.

❑ Chú ý

1 . Nếu: $AB \,//\, (P)$ thì $d[A, (P)] = d[B, (P)]$.

2 . Nếu: $AB \cap (P) = I$ thì: $d[A, (P)] / d[B, (Q)] = IA/ IB$.

❑ BÀI TOÁN 18: ***Tìm tập hợp hình chiếu ⊥ M của điểm cố định A trên đường thẳng d thay đổi trong mp(P) cố định và d qua điểm cố định O.***

❑ Phương pháp:

1 . Dựng $AH \perp (P)$ ($H \in (P)$) ta có: $HM \perp d$. (Theo ĐL 3 đường $\perp$).

2. Trong mp(P) góc HMO vuông nên M thuộc đường tròn đường kính OH chứa trong (P).

❑ BÀI TOÁN 19: ***Tìm tập hợp hình chiếu ⊥ H của một điểm cố đinh A trên mp(P) di động chứa đường thẳng d cố định***

❑ Phương pháp:

1 . Tìm mp(Q) qua A và $\perp d$.

2 . Tìm $c = (P) \cap (Q)$.

3 . Chiếu $\perp A$ lên c, điểm chiếu là H thì H chính là hình chiếu $\perp$ của A trên (P).

4 . Gọi $E = d \cap (Q)$. Trong mp góc $AHE = 90^0$ nên H thuộc đường tròn đường kính AE.

❑ BÀI TOÁN 20: ***Tìm góc giữa đường thẳng a và mp(P).***

❑ Phương pháp:

1 . Tìm $O = a \cap (P)$.

2. Chọn $A \in a$ và dựng $AH \perp (P)$ ($H \in (P)$)

(dựng đường thẳng qua điểm A cho trước và $\perp$ mp cho trước). $\widehat{AOH} = \widehat{(a,\alpha)}$.

❑ BÀI TOÁN 21: ***Góc giữa 2 mặt phẳng (P), (Q) - Góc nhị diện.***

❑ Phương pháp:

1 . Tìm $c = (P) \cap (Q)$.

2 . Tìm $(R) \perp c$ (Tức là tìm 2 đường thẳng cắt nhau cùng $\perp c$).

3 . Tìm $a = (R) \cap (P)$, $b = (R) \cap (Q)$ (đối với góc giữa 2 mặt phẳng), $((P), (Q)) = (a, b)$.

$Ox = (R) \cap (P)$, $Oy = (R) \cap (Q)$ (Đối với góc nhị diện). $((P), d, (Q)) = (Ox, Oy)$.

• **Chú ý** Nếu có 2 đường thẳng a, b lần lượt $\perp$ với (P) và (Q) thì: $((P), (Q)) = (a, b)$.

❑ BÀI TOÁN 22: ***Mặt phân giác của nhị diện ((P), c, (Q)).***

❑ Phương pháp:

□ **Cách 1**

1 . Tìm góc phẳng $\widehat{xOy}$ của nhị diện ($Ox \perp c$, $Oy \perp c$, $O \in c$) ((P), c, (Q)).

2 . Mặt phân giác của nhị diện ((P), c, (Q)) là mp qua cạnh c và phân giác Ot của góc xOy.

□ **Cách 2**

1 . Tìm một điểm A cách đều 2 mặt của nhị diện ((P), c, (Q)).

2 . Mặt phẳng phân giác của nhị diện là mặt phẳng qua A và c.

❑ **BÀI TOÁN 23:** ***Chứng minh 2 mặt phẳng (P), (Q) vuông góc.***

❑ **Phương pháp:**

 Cách 1

Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng $\perp$ với mặt phẳng kia.

 Cách 2

Chứng minh góc giữa 2 mặt phẳng có số đo = 90^0 .

❑ **BÀI TOÁN 24:** ***Xác định mp P chứa đường thẳng a và $\perp$ mp(Q). (a không $\perp$ (Q))***

❑ **Phương pháp:**

1 . Chọn 1 điểm $A \in a$.

2 . Dựng $AH \perp (Q)$. Khi đó $(P) = (a, AH)$.

 Chú ý Nếu có đường thẳng $d \perp (Q)$ thì $(P) // d$ hay $(d) \subset (P)$.

BÀI TOÁN 25: ***Tìm khoảng cách - Dựng đoạn $\perp$ chung của 2 đương thẳng chéo nhau a, b.***

❑ **Phương pháp:**

 Cách 1

1 . Tìm mp$(P) \perp a$, tìm $O = a \cap (P)$.

2 . Tìm hình chiếu b' của đường thẳng b trên mp(P)

- Tìm: $I = b \cap (P)$.
- Lấy điểm $M \in b$ dựng qua M đường thẳng: $MK \perp (P)$, ta có IK = là hình chiếu b' của b trên (P).

3 . Trong mp(P) dựng: $OH \perp b'$ ta có: $OH = d[a, b]$.

4 . Dựng: $HB // a$, $B \in b$.

5 . Dựng: $BA // OH$, $A \in a$ ta có AB là đoạn $\perp$ chung của a và b.

 Cách 2

1 . Tìm mp(P) chứa đường thẳng a và song song với đường thẳng b.

2. Khi đó: $d[a, b] = d[b, (P)] = d[M, (P)]$ (M là điểm tùy ý trên b)

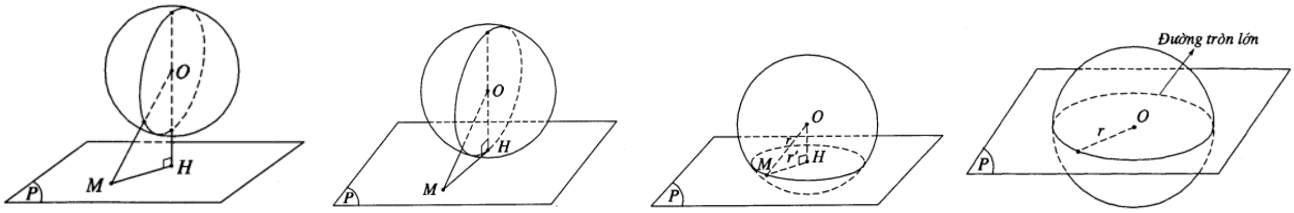
❑ **Một số công thức cần nhớ**

 Định lý Euler: Gọi: d, c, m theo thứ tự là số đỉnh, số cạnh và số mặt của một khối đa diện lồi. Khi đó ta có: $d - c + m = 2$.

 Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Ta có: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$.

 Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu của O trên (P) và $d = OH$



a. $d < R$: (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn $C(H; r)$ và $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

b. $d = R$: (P) cắt (S) tại một điểm duy nhất H.

c. $d > R$: $(P) \cap (S) = \varnothing$: (P) không cắt (S).

❑ **Diện tích mặt cầu - Thể tích khối cầu**

- $S = 4\pi R^2$ • $V = 4/3.\pi R^3$

❑ **Diện tích hình trụ - Thể tích khối trụ**

- $S_{XQ} = 2\pi Rh = 2\pi Rl$ • $V = \pi R^2 h = \pi R^2 l$ • $S_{TP} = S_{XQ} + S_{2ĐÁY}$

Trong đó R là bán kính đáy, h là chiều cao và l là đường sinh của một khối trụ.

❑ **Diện tích mặt nón - Thể tích khối nón**

- $S_{xq} = \pi Rl$ = 1/2.chu vi đáy nhân đường sinh
- $V = 1/3.\pi R^2 h$ = 1/3 diện tích đáy nhân chiều cao .
- $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$

A. Các đề thi Đại học từ năm 2002 đến 2011.

Bài 1 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mp(AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

❑ Hướng Dẫn: $S = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$

Bài 2 Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

1. Tính theo a khoảng cách giữa 2 đường thẳng A_1B, B_1D.

2. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh B_1B, CD, A_1D_1. Tính góc giữa 2 đường thẳng MP và C_1N.

❑ Hướng Dẫn: 1. $d = a/\sqrt{6}$ 2. 90^0

Bài 3 Cho hình tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); $AC = AD = 4$cm, $AB = 3$cm, $BC = 5$cm. Tính $d[A, (BCD)]$.

❑ Hướng Dẫn: $d = 6\sqrt{34}/17\ (cm)$

Bài 4 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên $SA \perp$ mp(ABC). Tính $d[A, (SBC)]$ theo a biết rằng $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

❑ Hướng Dẫn: $d = a\sqrt{2}/2$

Bài 5 Cho tứ diện $OABC$ có 3 cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi a, b, c lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Chứng minh rằng: $\cos a + \cos b + \cos c \leq \sqrt{3}$.

Bài 6 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a khoảng cách $d = d[S, BE]$.

☐ Hướng Dẫn: $d = 3a\sqrt{5}/5$

Bài 7 Cho tam giác vuông cân *ABC* có cạnh huyền $BC = a$. Trên đường thẳng $\perp$ với mp(*ABC*) tại điểm *A* lấy điểm *S* sao cho góc giữa 2 mặt phẳng (*ABC*) và (*SBC*) bằng 60^0. Tính độ dài đoạn *SA* theo *a*.

☐ Hướng Dẫn: $SA = a\sqrt{3}/2$

Bài 8 Tính thể tích khối tứ diên *ABCD* biết: $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ và các góc *BAC*, *CAD*, *DAB* đều bằng 60^0.

☐ Hướng Dẫn: $V = abc.\sqrt{2}/12$

Bài 9 Cho hình tứ diện đều *ABCD* có cạnh $a = 6\sqrt{2}$ cm. Hãy xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng *AD* và *BC*.

☐ Hướng Dẫn: Đoạn vuông góc chung là *MN* với *M*, *N* là trung điểm của *BC* và *AD*, $MN = 6$ (cm).

Bài 10 Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[B, A_1C, D]$.

☐ Hướng Dẫn: 120^0

Bài 11 Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy *ABC* là tam giác cân với: $AB = AC = a$ và góc $BAC = 120^0$, cạnh bên $BB_1 = a$. Gọi *I* là trung điểm CC_1. Chứng minh rằng tam giác AB_1I vuông ở *A*. Tính cosin của góc giữa 2 mặt phẳng (*ABC*), (AB_1I).

☐ Hướng Dẫn: $\cos\varphi = \sqrt{30}/10$

Bài 12 Cho tứ diện *ABCD* với $AB = AC = a$, $BC = b$, $(BCD) \perp (ABC)$, góc $BDC = 90^0$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* theo *a* và *b*.

☐ Hướng Dẫn: $R = a^2/\sqrt{4a^2 - b^2}$

Bài 13 Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy *ABCD* là một hình thoi cạnh *a*, góc $BAD = 60^0$, gọi *M* là trung điểm cạnh AA_1 và *N* là trung điểm cạnh CC_1. Chứng minh rằng 4 điểm B_1, *M*, *D*, *N* cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA_1 theo *a* để tứ giác B_1MDN là hình vuông.

☐ Hướng Dẫn: $AA_1 = a\sqrt{2}$

Bài 14 Cho hình lập phương $ABC.A_1B_1C_1$. Tìm điểm *M* thuộc cạnh AA_1 sao cho mp(BD_1M) cắt hình lập phương theo một thiết diện có diện tích nhỏ nhất.

☐ Hướng Dẫn: M là trung điểm của đoạn AA_1 .

Bài 15 Cho hình chóp đều *SABC* đáy *ABC* có cạnh bằng *a*, mặt bên tạo với đáy một góc bằng *b* ($0^0 < b < 90^0$). Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và *d*[*A*, (*SBC*)].

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3 \tan b / 24$, $d = a\sqrt{3}\sin b / 2$

Bài 16 Cho mp$P \perp$ mp$Q$ có giao tuyến là đường thẳng d. Trên d lấy 2 điểm A, B với $AB = a$. Trong mp$P$ lấy điểm C, trong mp$Q$ lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với d và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và tính $d[A, (BCD)]$ theo a.

☐ Hướng Dẫn: $R = a\sqrt{3}/2$, $d = a\sqrt{2}/2$

Bài 17 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Chứng minh rằng tam giác AMB cân tại M và tính diện tích tam giác AMB theo a.

☐ Hướng Dẫn: $S = a^2\sqrt{2}/2$

Bài 18 Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$ tam giác ABC vuông tại A, $AD = a$, $AC = b$, $AB = c$. Tính diện tích S của tam giác BCD theo a, b, c và chứng minh rằng $2S \geq \sqrt{abc\left(a+b+c\right)}$

☐ Hướng Dẫn: $S = 1/2.\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$, sử dụng BĐT Cauchy.

Bài 19 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng b ($0^0 < b < 90^0$). Tính tang của góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và ($ABCD$) theo b. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và b.

☐ Hướng Dẫn: $V = \sqrt{2}\,a^3 \tan b / 6$

Bài 20 Cho hình trụ có đáy là 2 hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho: $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3}/12$

Bài 21 Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = AD = a$, $AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Chứng minh $AC' \perp$ mp($BDMN$). Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.

☐ Hướng Dẫn: $V = 3a^3 / 16$

Bài 22 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. SB tạo với mặt đáy một góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = a\sqrt{3}/3$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$.

☐ Hướng Dẫn: $V = 10\sqrt{3}.a^3 / 27$

Bài 23 Cho hình chóp tam giác *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*, $SA = 2a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi *M* và *N* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* trên đường thẳng *SB* và *SC*. Tính thể tích của khối chóp *A.BCNM*.

- Hướng Dẫn: $V = 3\sqrt{3}a^3 / 50$

Bài 24 Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh đáy bằng *a*, gọi *SH* là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm *I* của *SH* đến mặt bên (*SBC*) bằng *b*. Tính thể tích của khối chóp *S.ABCD*.

- Hướng Dẫn: $V = 2a^3b / 3\sqrt{a^2 - 16b^2}$

Bài 25 Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* có cạnh bằng *a* và điểm *K* thuộc cạnh *CC'* sao cho: $CK = 2/3a$. Mặt phẳng (α) đi qua *A*, *K* và song song với *BD* chia khối lập phương thành 2 khối đa diện. Tính thể tích của hai khối đa diện đó.

- Hướng Dẫn: $V_1 = a^3/3$, $V_2 = 2a^3/3$

Bài 26 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật với: $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *AD* và *SC*, *I* là giao điểm của *BM* và *AC*. Chứng minh rằng mặt phẳng $(SAC) \perp (SMB)$. Tính thể tích của khối chóp *ANIB*.

- Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{2} / 36$

Bài 27 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh *a*, $\widehat{BAD} = 60^0$ và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi *C'* là trung điểm của *SC*. Mặt phẳng (*P*) đi qua *AC'* và song song với *BD*, cắt các cạnh *SB*, *SD* của hình chóp lần lượt tại *B'*, *D'*. Tính thể tích của khối chóp *S.AB'C'D'*.

- Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3}/18$

Bài 28 Cho hình lăng trụ *ABC.A'B'C'* có *A'.ABC* là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên $A'A = b$. Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (*ABC*) và (*A'BC*). Tính $\tan\alpha$ và thể tích của khối chóp *A'.BB'C'C*.

- Hướng Dẫn: $\tan\alpha = 2\sqrt{3b^2 - a^2} / a$, $V = a^2.\sqrt{3b^2 - a^2} / 6$

Bài 29 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, mặt bên *SAD* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *SB*, *BC*, *CD*. Chứng minh $AM \perp BP$ và tính thể tích của khối tứ diện *CMNP*.

- Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3}/96$

Bài 30 Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*. Gọi *E* là điểm đối xứng của *D* qua trung điểm của *SA*, *M* là trung điểm của *AE*, *N* là trung điểm của *BC*. Chứng minh $MN \perp BD$ và tính theo a khoảng cách giữa 2 đường thẳng *MN* và *AC*.

☐ Hướng Dẫn: $d = a\sqrt{2}/4$

Bài 31 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *SB*. Chứng minh ΔSCD vuông và tính khoảng cách từ *H* đến mp(*SCD*).

☐ Hướng Dẫn: $d = a/3$

Bài 32 Cho lăng trụ *ABC.A'B'C'* có độ dài cạnh bên bằng 2*a*, đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh *A'* trên mp(*ABC*) là trung điểm của cạnh *BC*. Tính theo *a* thể tích khối chóp *A'.ABC* và tính cosin của góc giữa 2 đường thẳng *AA'*, *B'C'*.

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3/2$, $\cos\varphi = 1/4$

Bài 33 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh 2*a*, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (*SAB*) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *BC*. Tính theo *a* thể tích của khối chóp *S.BMDN* và tính cosin của góc giữa 2 đường thẳng *SM*, *DN*.

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3}/3$, $\cos\varphi = 1/\sqrt{5}$

Bài 34 Cho hình lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *BC*. Tính theo *a* thể tích của khối lăng trụ *ABC.A'B'C'* và khoảng cách giữa 2 đường thẳng *AM*, *B'C*.

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{2}/2$, $d = a/\sqrt{17}$

Bài 35 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *D*, $AB = AD = 2a$, $CD = a$, góc giữa 2 mặt phẳng (*SBC*) và (*ABCD*) bằng 60^0. Gọi *I* là trung điểm của cạnh *AD*. Biết hai mặt phẳng (*SBI*) và (*SCI*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* theo *a*.

☐ Hướng Dẫn: $V = 3\sqrt{15}a^3/5$

Bài 36 Cho hình lăng trụ *ABC.A'B'C'* có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng *BB'* và mp(*ABC*) bằng 60^0. ΔABC vuông tại *C* và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm *B'* lên mp(*ABC*) trùng với trọng tâm của ΔABC. Tính thể tích khối tứ diện *A'ABC* theo *a*.

☐ Hướng Dẫn: $V = 9a^3/208$

Bài 37 Cho hình lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Tính theo *a* thể tích khối tứ diện *IABC* và khoảng cách từ điểm *A* đến mp(*IBC*).

☐ Hướng Dẫn: $V = 4a^3/9$, $d = 2\sqrt{5}a/5$

Bài 38 Cho hình chóp *S.ABC* mà mỗi mặt bên là một tam giác vuông, $SA = SB = SC = a$. Gọi *N*, *M*, *E* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *AC*, *BC*, *D* là điểm đối xứng của *S* qua *E*, $I = AD \cap (SMN)$. Chứng minh rằng $AD \perp SI$ và tính theo a thể tích của khối tứ diện *MBSI*.

- Hướng Dẫn: $V = a^3 / 36$

Bài 39 Cho tứ diện *ABCD* và các điểm *M*, *N*, *P* lần lượt thuộc các cạnh *BC*, *BD*, *AC* sao cho: $BC = 4BM$, $AC = 3AP$, $BD = 2BN$. Mặt phẳng (*MNP*) cắt *AD* tại *Q*. Tính AQ / AD và tỷ số thể tích 2 phần của khối tứ diện *ABCD* được chia bởi mp(*MNP*).

- Hướng Dẫn: $AQ / AD = 3/5$, $V_1 / V_2 = 7 / 13$

Bài 40 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng *a*, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Tính theo *a* thể tích khối tứ diện *SACD* và tính cosin của góc giữa 2 đường thẳng *SB*, *AC*.

- Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3} / 6$, $\cos\varphi = \sqrt{2} / 4$

Bài 41 Cho tứ diện *ABCD* có các mặt *ABC* và *ABD* là các tam giác đều cạnh *a*, các mặt *ACD* và *BCD* vuông góc với nhau. Hãy tính theo *a* thể tích khối tứ diện *ABCD* và tính số đo của góc giữa 2 đường thẳng *AD* và *BC*.

- Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{2} / 12$, 60^0.

Bài 42 Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại đỉnh *B*, $AB = a$, $SA = 2a$, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng qua *A* vuông góc với *SC* cắt *SB*, *SC* lần lượt tại *H*, *K*. Tính theo *a* thể tích khối tứ diện *SAHK*.

- Hướng Dẫn: $V = 8a^3 / 45$

Bài 43 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB* và *AD*, *H* là giao điểm của *CN* và *DM*. Biết *SH* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp *S.CDNM* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *DM* và *SC* theo *a*.

- Hướng Dẫn: $V = 5a^3\sqrt{3} / 24$, $d = 2a\sqrt{3} / \sqrt{19}$

Bài 44 Cho hình lăng trụ tam giác đều *ABC.A'B'C'* có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng (*A'BC*) và (*ABC*) bằng 60^0. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *A'BC*. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *GABC* theo *a*.

- Hướng Dẫn: $V = 3\sqrt{3}a^3 / 8$, $R = 7a / 12$

Bài 45 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên $SA = a$ hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt phẳng(*ABCD)* là *H* thuộc đoạn *AC*. $AH = AC/4$. Gọi *CM* là đường cao của ΔSAC. Chứng minh *M* là trung điểm của *SA* và tính thể tích khối tứ diện *SMBC* theo *a*.

□ Hướng Dẫn: $V = \sqrt{14}\,a^3 / 48$

Bài 46 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, mặt phẳng (*SAB*) vuông góc với mặt phẳng đáy, *SA* = *SB*, góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Tính theo *a* thể tích của khối chóp *S.ABCD*.

□ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{5} / 6$

Bài 47 Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*, *AB* = *BC* = 2*a*, hai mặt phẳng (*SAB*) và (*SAC*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Gọi *M* là trung điểm của *AB*, mặt phẳng qua *SM* và song song với *BC*, cắt *AC* tại *N*. Biết góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*ABC*) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp *S.BCNM* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *SN* theo *a*.

□ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3}$, $d = a\sqrt{12} / \sqrt{13}$

Bài 48 Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy *ABCD* là hình chữ nhật. *AB* = *a*, *AD* = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng (*ABCD*) trùng với giao điểm *AC* và *BD*. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (*ABCD*) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo *a*.

□ Hướng Dẫn: $V = 3a^3 / 2$, $d = a\sqrt{3} / 2$

Bài 49 Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*, *AB* = *a*, *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABC*), góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*ABC*) bằng 30^0. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *SC*. Tính thể tích của khối chóp *S.ABM* theo *a*.

□ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3} / 36$

Bài 50 Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, *BA* = 3*a*, *BC* = 4*a* mặt phẳng (*SBC*) vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\angle SBC = 30^0$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng (*SAC*) theo *a*.

□ Hướng Dẫn: $V = 2a^3\sqrt{3}, d = 6a / \sqrt{7}$

B. Các đề thi thử Đại Học ở các trường

Bài 1 Cho hình chóp đều *S.ABC*, đáy *ABC* có cạnh bằng *a*, mặt bên tạo với đáy một góc bằng φ (0° < φ < 90°). Tính thể tích khối hình chóp *S.ABC* và khoảng cách từ đỉnh *A* đến mặt phẳng (*SBC*).

□ Hướng Dẫn: $V = a^3 \tan\varphi / 24$, $h = \sqrt{3}a.\sin\varphi / 2$

Bài 2 Tính thể tích *V* của khối tứ diện *ABCD* biết rằng: *AB* = *a*, AC = *b*, AD = *c* và các góc , , đều bằng 60°.

☐ Hướng Dẫn: $V = abc\sqrt{2}/12$

Bài 3 Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, = = 90°, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = a$\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

☐ Hướng Dẫn: $d = a/3$

Bài 4 Cho hình chóp *S.ABC* đáy là tam giác *ABC* có *AB* = *AC* = 3*a*, *BC* = 2*a*. Các mặt (*SAB*), (*SBC*), (*SCA*) đều hợp với mặt phẳng (*ABC*) một góc 60^0. *SH* vuông góc với (*ABC*) ($H \in (ABC)$).

1. Chứng minh rằng *H* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* và *SA* vuông góc với *BC*.
2. Tính thể tích *V* của khối chóp.

☐ Hướng Dẫn: $V = 2\sqrt{3}a^3/3$

Bài 5 Cho hình lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có tất cả các cạnh đều bằng *a*. Gọi *M* là trung điểm của *AA'*. Tính thể tích của khói tứ diện *BMB'C'* theo *a* và chứng minh rằng *BM* vuông góc với *B'C*.

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3}/12$

Bài 6 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật. Lấy *M*, *N* lần lượt thuộc các cạnh

SB, *SD* sao cho: — = — = .

1. Mặt phẳng (*AMN*) cắt *SC* tại *P*. Tính tỉ số: —.
2. Tính thể tích của hình chóp *S.AMPN* theo thể tích *V* của hình chóp *S.ABCD*.

☐ Hướng Dẫn: 1. $SP/CP = 1$ 2. $V_{s.ampn} = 1/3.V$

Bài 7 Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh bên bằng *a* và mặt chéo *SAC* là tam giác đều. Qua *A* dựng mặt phẳng (*P*) vuông góc với *SC*. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (*P*) và hình chóp.

☐ Hướng Dẫn: $S = a^2.\sqrt{3}/6$

Bài 8 Cho hình chóp tam giác *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*, *SA* = 2*a* và *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Gọi *M* và *N* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* trên các đường thẳng *SB* và *SC*. Tính thể tích của khối chóp *A.BCNM*.

☐ Hướng Dẫn: $V = 3\sqrt{3}a^3/50$

Bài 9 Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có độ dài cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên bằng $\frac{\sqrt{}}{}$. Tính góc tạo bởi mặt bên với mặt đáy và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

☐ Hướng Dẫn: 1. 60^0 2. $V = 125\sqrt{3}\pi .a^3 \ / \ 432$

Bài 10 Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA* = *x* và tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng *a*. Chứng minh rằng đường thẳng *BD* vuông góc với mặt phẳng (*SAC*). Tìm *x* theo *a* để thể tích của khối chóp *S.ABCD* bằng $a^3\sqrt{2}/6$.

☐ Hướng Dẫn: $x = a \vee x = a\sqrt{2}$

Bài 11 Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông với *AB* = *BC* = *a*, cạnh bên *AA'* = $a\sqrt{2}$. *M* là điểm trên *AA'* sao cho: $\vec{AM} = -\vec{AA'}$. Tính thể tích của khối tứ diện *MA'BC'*.

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{2}/9$

Bài 12 Trong không gian, cho tam giác vuông cân *ABC* có cạnh huyền *AB* = 2*a*. Trên đường thẳng *d* đi qua *A* và vuông góc với mặt phẳng (*ABC*) lấy điểm *S* sao cho mặt phẳng (*SBC*) tạo với mặt phẳng (*ABC*) một góc bằng 60^0. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *SABC*.

☐ Hướng Dẫn: $S = 10\pi a^2$

Bài 13 Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*, mặt bên (*SAB*) vuông góc với mặt đáy, hai mặt bên còn lại tạo với mặt đáy một góc *α*. Tính thể tích khối chóp *S.ABC*.

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3 \tan\alpha / 16$

Bài 14 Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh bằng *a* và: $\vec{}.\vec{} = \vec{}.\vec{} = \vec{}.\vec{} = —$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* theo *a*.

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{2}/12$.

Bài 15 Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a* và cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60 . Một mặt cầu tâm *O* tiếp xúc với mặt đáy (*ABC*) tại *A* và tiếp xúc với đường thẳng *BS* tại *H*. Hãy xác định vị trí tương đối giữa *H* với hai điểm *B*, *S* và tính diện tích mặt cầu tâm *O*.

☐ Hướng Dẫn: 1. H nằm giữa S và B 2. $S = \left(19 - 8\sqrt{3}\right)\pi a^2 / 3$

Bài 16 Tính thể tích của hình chóp *S.ABCD* biết *SA* = *SB* = *SC* = *SD* = *AB* = *BC* = *CD* = *DA* = *a* và mặt phẳng (*SBC*) vuông góc với mặt phẳng (*SCD*).

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3 / 3\sqrt{2}$

Bài 17 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh bằng *a* và = 60 . Các cạnh bên *SA*, *SB*, *SC* nghiêng đều trên đáy góc *α*. Tình khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (*SBC*) theo *a* và *α*.

☐ Hướng Dẫn: $d = a\sqrt{3}.\sin\alpha \ / \ \sqrt{4 - \cos^2\alpha}$

Bài 18 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, *SA* = *a*; *SA* vuông góc với (*ABCD*). Trên các cạnh *AD*, *CD* lần lượt lấy các điểm *M*, *E* sao cho: *AM* = *CE* = −. Gọi *N* là trung điểm của *BM*, *K* là giao điểm của *AN* và *BC*. Tính thể tích khối tứ diện *SADK* theo *a* và chứng minh rằng (*SDK*) vuông góc với (*SAE*).

- Hướng Dẫn: $V = a^3/6$

Bài 19 Cho lăng trụ tam giác đều *ABC.A'B'C'* có cạnh đáy bằng *a*. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng *AA'*, *AB*. Biết góc giữa hai mặt phẳng (*C'AI*) và (*ABC*) bằng 60 . Tính theo *a* thể tích khối chóp *NAC'I* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *MN* và *AC'*.

- Hướng Dẫn: $V = a^3/32$, $d = a\sqrt{3}/8$.

Bài 20 Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'*, đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*. Khoảng cách từ tâm của tam giác *ABC* đến mặt phẳng (*A'BC*) bằng −. Tính thể tích của lăng trụ theo *a*.

- Hướng Dẫn: $V = 3a^3\sqrt{2}/16$

Bài 21 Cho hình chóp tứ giác đều *SABCD*, đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, mặt bên nghiêng với đáy một góc 60 . Một mặt phẳng (*P*) qua *AB* và vuông góc với mặt phẳng (*SCD*) cắt *SC*, *SD* lần lượt tại *C'* và *D'*. Tính thể tích hình chóp *SABC'D'*.

- Hướng Dẫn: $V = \sqrt{3}a^3/16$

Bài 22 Hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi, góc nhọn =∝ bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi là *r*, các mặt bên nghiêng đều trên đáy góc 60 . Tính: . .

- Hướng Dẫn: $V = 4\sqrt{3}r^3/3\sin\alpha$

Bài 23 Lăng trụ *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là Δ cân, *AB* = *BC* = 3*a*, *AC* = 2*a*. Các mặt phẳng (*B'AB*), (*B'AC*), (*B'BC*) cùng tạo với mặt phẳng (*ABC*) góc 60 . Tính . ' ' '.

- Hướng Dẫn: $V = 2\sqrt{3}a^3$

Bài 24 Trong mặt phẳng (*P*) cho đường tròn đường kính *AB* = *a* và một điểm *C* di động trên đường tròn đó (*C* ≢ *A* và *C* ≢ *B*). Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (*P*) tại *A*, ta lấy điểm *S* sao cho *SA* = *h*. Mặt phẳng (*Q*) qua *A* vuông góc với *SB* cắt *SB*, *SC* lần lượt tại *B'*, *C'*. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp *S.AB'C'*.

- Hướng Dẫn: $\mathrm{Max}V = a^2h^4/12\sqrt{\left(a^2+h^2\right)^3}$

Bài 25 Cho hình chóp *SABCD* có *SA* = *a* và vuông góc với (*ABCD*). Đáy *ABCD* là hình thang vuông ở *A* và *B*, *AB* = *BC* = *a*, *AD* = 2*a*. *E* là trung điểm *AD*. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp *SCED*.

☐ Hướng Dẫn: $R = a\sqrt{11}/2$

Bài 26 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy, *SC* tạo với mặt phẳng đáy góc 45 và tạo với mặt phẳng (*SAB*) góc 30 . Biết độ dài cạnh *AB* = *a*. Tính thể tích khối của chóp *S.ABCD*.

☐ Hướng Dẫn: $V = \sqrt{2}\,a^3/3$

Bài 27 Cho tứ diện *ABCD* có ba cạnh *AB*, *BC*, *CD* đôi một vuông góc với nhau và *AB* = *BC* = *CD* = *a*. Gọi *C'* và *D'* lần lượt là hình chiếu của điểm *B* trên *AC* và *AD*. Tính thể tích tứ diện *ABC'D'*.

☐ Hướng Dẫn: V= $a^3/36$

Bài 28 Cho hình chóp tứ giác đều *SABCD*, đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, mặt bên nghiêng với đáy một góc 60 . Một mặt phẳng (*P*) qua *AB* và vuông góc với mặt phẳng (*SCD*) cắt *SC*, *SD* lần lượt tại *C'*, *D'*. Tính thể tích hình chóp *SABC'D'*.

☐ Hướng Dẫn: $V = \sqrt{3}a^3/16$

Bài 29 Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'*. Một mặt phẳng (*P*) chia hình lập phương ra làm hai phần có thể tích bằng nhau, chứng minh rằng (*P*) đi qua tâm của hình lập phương (Tâm của hình lập phương là tâm của hình cầu ngoại tiếp hình lập phương).

☐ Hướng Dẫn:

Bài 30 Tính thể tích của hình chóp *S.ABCD* biết: *SA* = *SB* = *SC* = *SD* = *AB* = *BC* = *CD* = *DA* = *a* và mặt phẳng (*SBC*) vuông góc với mặt phẳng (*SCD*).

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3/3\sqrt{2}$

Bài 31 Cho tứ diện *OABC* có các độ dài: *OA* = 4cm, *OB* = 5cm, *OC* = 6cm và có các góc = = = 60 . Tính thể tích tứ diện *OABC*.

☐ Hướng Dẫn: $V = 5\sqrt{8}\ (cm^3)$

Bài 32 Cho tứ diện *ABCD*, điểm *M* ở trong cạnh *AC*, một mặt phẳng (*P*) song song với hai cạnh *AB* và *CD*, (*P*) cắt các cạnh *AC*, *BD*, *BC* tại các điểm tương ứng *M*, *N*, *E*, *F*. Mặt phẳng (*P*) chia tứ diện đã cho thành hai khối đa diện. Hãy tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện đó theo: $k = —$.

☐ Hướng Dẫn: $V_1/V_2 = \left(k^3 + 3k^2\right)/\left(3k+1\right)$

Bài 33 Lăng trụ *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*. Điểm *A'* cách đều các điểm *A*, *B*, *C* và đường thẳng *AA'* tạo với mặt phẳng (*ABC*) góc 60 . Tính thể tích hình chóp *B'.ACC'A'* .

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3}/6$

Bài 34 Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh đáy bằng *a* và góc $\mathrm{ASB} = \propto$. Gọi *O* là giao điểm hai đường chéo của đáy *ABCD*. Hãy xác định góc α để mặt cầu tâm *O* đi qua năm điểm *S*, *A*, *B*, *C*, *D*.

□ Hướng Dẫn: $\alpha = 60^0$

Bài 35 Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có độ dài cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng 30 . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

□ Hướng Dẫn: $S = 8\pi a^2 / 3$

Bài 36 Hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AD = a\sqrt{2}$, $CD = 2a$. Cạnh *SA* vuông góc với đáy và $SA = 3\sqrt{2}a$ (> 0). Gọi *K* là trung điểm của cạnh *AC*. Chứng minh mặt phẳng(*SBK*) vuông góc với mặt phẳng (*SAC*) và tính thể tích khối chóp *SBCK* theo *a*.

□ Hướng Dẫn: V= a^3

Bài 37 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh *a* (*a* > 0). Góc $\mathrm{ABC} = 120$, cạnh *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*) và *SA* = *a*. Gọi *C'* là trung điểm cạnh *SC*. Mặt phẳng (*α*) đi qua *AC'* và song song với *BD* cắt các cạnh *SB, SD* lần lượt tại *B'*, *D'*. Tính thể tích khối của chóp *S.AB'C'D'*.

□ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3}/18$

Bài 38 Cho hình chóp *SABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông góc tại *A* và *D*, *AB* = *AD* = *a*, *DC* = 2*a*. Cạnh bên *SD* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*), $SD = a\sqrt{3}$ (*a* là số dương cho trước).

1. Tính thể tích khối chóp *SABCD* theo *a*.
2. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *DBC*. Tính khoảng cách từ điểm *G* đến mặt phẳng (*SBC*) theo *a*.

□ Hướng Dẫn: 1. $V = \sqrt{3}a^3 / 2$ 2. $d = a\sqrt{30}/15$

Bài 39 Cho hình lăng trụ tam giác đều *ABC.A'B'C'* có độ dài cạnh đáy bằng *a*, góc giữa đường thẳng *AB'* và mặt phẳng (*BB'C'C*) bằng *α*.

1. Tính độ dài đoạn thẳng *AB'* theo *a* và *α*.
2. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ *ABC.A'B'C'* theo *a* và *α*.

□ Hướng Dẫn: $AB' = a\sqrt{3}/2\sin\alpha$, $S = 4\pi a^2\left(3/16\sin^2\alpha + 1/12\right)$

Bài 40 Tam giác *MNP* có đỉnh *P* nằm trong mặt phẳng (*α*), hai đỉnh *M* và *N* nằm về một phía của (*α*). Lần lượt lấy *M'*, *N'* sao cho *PM'N'* là tam giác đều cạnh *a*. Giả sử: *MM'* = 2*NN'* = *a*. Tính diện tích tam giác *PMN*, từ đó suy ra giá trị của góc giữa hai mặt phẳng (*α*) và (*MNP*).

□ Hướng Dẫn: $S = \sqrt{6}a^2 / 4$, $\varphi = 45^0$

Bài 41 Cho tứ diện $SABC$ có góc $ABC = 90$; $SA = AB = 2a$. $BC = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là điểm trên đường thẳng AB, sao cho: $\vec{\ } = 2\vec{\ }$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCM).

- ☐ Hướng Dẫn: $d = 2\sqrt{3}a / \sqrt{43}$

Bài 42 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên đường thẳng AC lấy điểm M và trên đường thẳng $C'D$ lấy điểm N sao cho: MN // BD'. Tính tỉ số: CM / CA.

- ☐ Hướng Dẫn: $CM / CA = 1/3$

Bài 43 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của cạnh BC và I là tâm của hình vuông $CC'D'D$. Tính thể tích của các khối đa diện do mặt phẳng (AKI) chia ra trên hình lập phương.

- ☐ Hướng Dẫn: $V_1 = 7/36 \,.\, a^3$, $V_2 = 29/36.a^3$

Bài 44 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

- ☐ Hướng Dẫn: $V = 5\sqrt{3}a^3 / 24$, $d = 2\sqrt{3}a / \sqrt{19}$

Bài 45 Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng ($A'BC$) và (ABC) bằng 60 Gọi G là trong tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a.

- ☐ Hướng Dẫn: $V = 3\sqrt{3}a^3 / 8$, $R = 7a / 12$

Bài 46 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng ($ABCD$) là điểm H thuộc đoạn AC: $AH = AC/4$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a.

- ☐ Hướng Dẫn: $V = \sqrt{14}a^3 / 48$

Bài 47 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45 . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

- ☐ Hướng Dẫn: $V = \sqrt{5}a^3 / 6$

Bài 48 Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc mặt phẳng ($ABCD$), đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a$, $AD = 2a$, góc giữa hai mặt (SAD) và (SCD) là 60^0. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ và $SACD$. Tính tỉ số giữa V_1 và V_2

□ Hướng Dẫn: $V_1 / V_2 = 2\sqrt{6} / 9$

Bài 49 Cho tứ diện *SABC* có Δ*ABC* cân tại *A*, *SA* vuông góc với mp(*ABC*), *SA* = *a*, diện tích Δ*SBC* gấp 2 lần diện tích Δ*ABC*. Tính khoảng cách từ *A* đến mp(*SBC*) và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *SABC*.

□ Hướng Dẫn: $d = a / 2$, $R = a\sqrt{21} / 6$

Bài 50 Cho hình chóp tứ giác đều *SABCD* có tất cả các cạnh bằng *a*. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp *SABCD*. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*SCD*).

□ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{2} / 6$, $\tan\varphi = -2\sqrt{2}$

Bài 51 Cho hình chóp *SABC* có *ABC* là tam giác đều cạnh *a*, mp(*SAB*) vuông góc với mp(*ABC*), góc giữa hai mặt bên (*SBC*) và (*SAC*) với mp(*ABC*) cùng bằng 60^0. Tính thể tích hình chóp *SABC*. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *SABC*.

□ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{3} / 16$, $R = a\sqrt{1333} / 72$

Bài 52 Cho hình trụ bán kính đáy *R* nội tiếp trong lăng trụ tứ giác đều có đường chéo hợp với đáy một góc *α*. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ và tính thể tích của lăng trụ ngoại tiếp

□ Hướng Dẫn: $V_{HT} = 2\sqrt{2}\pi R^3 \tan\alpha$, $S_{xq} = 4\sqrt{2}\,\pi R^2 \tan\alpha$, $V_{LT} = 8\sqrt{2}R^3 \tan\alpha$

Bài 53 Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều và có cạnh bằng 2*a*; hai mặt phẳng (*SAB*) và (*SAC*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*ABC*), Gọi *I* là trung điểm cạnh *BC*. Mặt phẳng (*P*) qua *A* vuông góc với *SI* cắt *SB*, *SC* lần lượt tại *M*, *N*. Biết rằng: $V_{SAMN} = 1/4\ .V_{SABC}$, Hãy tính: V_{SABC} (V_{SAMN} , V_{SABC} lần lượt là thể tích các khối chóp *SAMN* và *SABC*).

□ Hướng Dẫn: $V = a^3$

Bài 54 Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A* và *B*, *AB* = *BC* = *a*, *AD* = 2*a*, *SA* ⊥ (*ABCD*). Cho biết góc giữa (*SAD*) và (*SCD*) bằng 60^0. Tính thể tích hình chóp.

□ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{15} / 6$

Bài 55 Cho hình chóp *ABCD* có *AB* = *x* (*x* > 0), các cạnh còn lại đều bằng $\sqrt{3}$. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của *AB* và *CD*. Tính thể tích của hình chóp. Tìm điều kiện của *x* để bài toán có nghĩa .

□ Hướng Dẫn: $V = \sqrt{3}\,x.\sqrt{9 - x^2} / 12$, $0 < x < 3$

Bài 56 Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy là tam giác vuông tại *A*. Biết *AB* = *AC* = *AA'*. *M* là điểm di động trên *AC'*, *N* là điểm di động trên *BC* sao cho *M* ≠ *A* và *AM* = *BN*.

1. Chứng minh: *MN* // (*ABB'A'*)

2. Xác định vị trí của *MN* sao cho độ dài *MN* ngắn nhất.

☐ Hướng Dẫn: *M* là trung điểm của *AC'*, *N* là trung điểm của *BC*, $Min\,MN = a\sqrt{2}/2$

Bài 57 Cho hình chóp *SABC* có đáy là tam giác vuông cân tại *B*, *BC* = *a*, $SA \perp (ABC)$ và *SA* = 2*a*. Gọi *I* là trung điểm của *SC* và *M* là điểm bất kì trên cạnh *SB*. Tính diện tích tam giác *AIM* khi (*AIM*) $\perp$ (*SBC*)

☐ Hướng Dẫn: $S = a^2\sqrt{14}/10$

Bài 58 Trong mặt phẳng (*P*) cho tam giác *ABC*, trong đó *ABC* không phải tam giác cân. Dựng nửa đường thẳng *Ax* vuông góc mặt phẳng (*P*) và *S* là điểm trên *Ax*. Gọi *D*, *E* tương ứng là hình chiếu của *A* trên *SB* và *SC*.

1. Chứng minh *DE* không song song với *BC*.
2. Chứng minh rằng khi *S* di động trên *Ax* ($S \neq A$) thì tồn tại điểm cố định cách đều năm điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

☐ Hướng Dẫn: 2. Điểm *O* tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Bài 59 Cho đường tròn đường kính *AB* bằng 2*R* và *C* là một điểm chạy trên đường tròn. Trên đường thẳng đi qua *A* và vuông góc với mặt phẳng của đường tròn, lấy điểm *S* sao cho *SA* = *a* < 2*R*.

1. Giả sử β là góc giữa hai mặt phẳng (*SBA*) và (*SBC*). Đặt $\alpha = \widehat{BAC}$. Hãy tìm $\sin\beta$ theo: *a*, *R*, α.
2. Gọi *E* và *F* tương ứng là các trung điểm của *AC*, *SB*. Xác định vị trí của *C* trên đường tròn sao cho *EF* là đường vuông góc chung của *AC* và *SB*.

☐ Hướng Dẫn: 1. $\sin\beta = \cos\alpha.\sqrt{a^2+4R^2}\,/\,\sqrt{a^2+4R^2\cos^2\alpha}$

2. *C* là giao điểm của đường tròn đã cho với đường tròn tâm *B* bán kính *a*, luôn có 2 vị trí của *C*.

Bài 60 Cho hình chóp *S.ABCD* đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Gọi *B'*, *D'* là hình chiếu của *A* lên *SB*, *SD*.

1. Giả sử: $SC \cap (AB'D') = C'$. Chứng minh: *AB'C'D'* là tứ giác nội tiếp.
2. Giả sử *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, *SA* = 2*a*. Tìm thể tích hình chóp *S.AB'C'D'*.

☐ Hướng Dẫn: 2. $V = 16a^3/45$

Bài 61 Trong mặt phẳng (*P*) cho hình vuông *ABCD* cạnh bằng *a*. Hai nửa đường thẳng *Bx*, *Dy* vuông góc với mặt phẳng (*P*) và ở về cùng một phía đối với (*P*). *M* và *N* tương ứng là hai điểm trên *Bx* và *Dy*. Đặt: *BM* = *u*, *DN* = *v*.

1. Tìm mối liên hệ giữa *u*, *v* để $(MAC) \perp (NAC)$.
2. Giả sử các đại lượng *u*, *v* thỏa mãn điều kiện ở câu 1. Chứng minh rằng: $(AMN) \perp (CMN)$.

☐ Hướng Dẫn: 1. $2uv = a^2$.

Bài 62 Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* đáy là tam giác cân *ABC* với $AB = AC$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi *M* là trung điểm của *AA'* và giả sử mặt phẳng (*C'MB*) tạo với đáy (*ABC*) một góc β.

1. Chứng minh: $\widehat{C'BC} = \beta$.
2. Tìm mối liên hệ giữa α và β để *C'MB* là tam giác vuông.

□ Hướng Dẫn: 2. $\tan(\alpha/2) = \cos\beta$

Bài 63 Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng *a*. Có một hình cầu đi qua *A* và tiếp xúc với *SB*, *SD* tại các trung điểm của chúng.

1. Xác định tâm *O* và tính bán kính hình cầu ấy.
2. Tính thể tích hình chóp *S.OBCD*.

□ Hướng Dẫn: $R = 3a\sqrt{2}/8$, $V = 5\sqrt{2}\,a^3/48$

Bài 64 Trong mặt phẳng (*P*) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Trên *AB* lấy điểm *H*. Từ *H* kẻ đường vuông góc với *AB* cắt nửa đường tròn trên tại *M*. Gọi *I* là trung điểm của *HM*. Nửa đường thẳng vuông góc với (*P*) tại *I* cắt mặt cầu đường kính *AB* tại *K*.

1. Chứng minh rằng khi *H* di động thì mặt phẳng (*KAB*) tạo với (*P*) một góc không đổi.
2. Chứng minh rằng khi *H* di động thì tâm *S* mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABKI* nằm trên một đường thẳng cố định

□ Hướng Dẫn

Bài 65 Trong mặt phẳng (*P*) cho tam giác đều *ABC* cạnh *a*. Từ *B* và *C* về cùng một phía của (*P*) dựng hai nửa đường thẳng *Bx*, *Cy* vuông góc với (*P*). Trên *Bx* và *Cy* lần lượt lấy hai điểm *M*, *N*. Đặt: $BM = u$, $CN = v$.

1. Tìm hệ thức giữa *u*, *v* để *MAN* là tam giác vuông tại *M*.
2. Giả sử $\widehat{AMN} = 90^0$ và v = 2u. Gọi α là góc của hai mặt phẳng (*AMN*) và (*BCMN*). Tính giá trị của α.

□ Hướng Dẫn: 1. $2uv = a^2 + 2u^2$ 2. $\alpha = 45^0$

Bài 66 Trong mặt phẳng (*P*) cho hình vuông *ABCD* cạnh bằng *a*. Đoạn $SA = 2a$ vuông góc với (*P*) tại *A*. Điểm *M* và *N* di động trên *BC* và *CD*. Đặt: $BM = u$, $DN = v$.

1. Tìm mối liên hệ giữa *u* và *v* để hai mặt phẳng (*SAM*) và (*SAN*) tạo với nhau góc 45^0.
2. Giả sử *M*, *N* di động nhưng thỏa mãn điều kiện ở câu 1. Hãy xác định vị trí của *M*, *N* để tứ diện *SAMN* có thể tích lớn nhất.

□ Hướng Dẫn: 1. $a(u+v) + uv = a^2$ 2. $M \equiv B, N \equiv C$ hoặc $M \equiv C, N \equiv D$.

Bài 67 Trong mặt phẳng (*P*) cho tam giác đều *ABC* cạnh bằng *a*. Trên cạnh *AB* lấy điểm *M*. Đặt: $AM = x$. Qua *M* vẽ đường thẳng Δ vuông góc với (*P*). Lấy *S* trên Δ sao cho $MS = MA$.

1. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (*SAC*) và (*ABC*).
2. Gọi *I* là trung điểm của *BC*. Mặt phẳng (*SMI*) cắt *AC* kéo dài tại *N* ($NA > NC$).

Tìm x để hệ có hệ thức: $V_{SMBI} + V_{SCNI} = V_{SABC}$.

☐ Hướng Dẫn: 1. $\cos\alpha = \sqrt{21}/7$ 2. $x = a\left(\sqrt{5}-1\right)/2$

Bài 68 Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* mà khoảng cách từ đỉnh *A* đến mặt phẳng (*SBC*) bằng $2a$. Với giá trị nào của góc α giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp thì thể tích của hình chóp là nhỏ nhất. Tính giá trị bé nhất ấy.

☐ Hướng Dẫn: $\cos\alpha = \sqrt{3}/3$, $V_{Min} = 2\sqrt{3}a^3$

Bài 69 Cho tứ diện *ABCD* có: $BC = a$, $AB = AC = b$, $BD = DC = c$

1. Với điều kiện nào của b, c thì đường thẳng nối I, J là đường vuông góc chung của BC và AD ở đây I, J tương ứng là các trung điểm của BC và AD. Chứng minh rằng khi ấy hình cầu đường kinh CD qua I và J.
2. Giả sử: $b = c = \frac{\sqrt{}}{}$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng *ABC* và *DBC*. Tìm α để hình cầu đường kính *IJ* tiếp xúc với *CD*.

☐ Hướng Dẫn: 1. $b = c$ 2. $\sin(\alpha/2) = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/2$

Bài 70 Cho hình chóp tam giác *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh a. Các mặt (*SAB*), (*SBC*), (*SCA*) lần lượt tạo với đáy (*ABC*) các góc α, β, γ .

1. Tìm thể tích hình chóp *S.ABC*.
2. Tìm khoảng cách từ *C* tới mặt phẳng (*SAB*).

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3/2\sin\alpha\left(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\right)$, $h = a\sqrt{3}.\sin\alpha/2$

Bài 71 Cho tứ diện *OABC* trong đó *OA* vuông góc với mặt phẳng (*OBC*). Giả sử: $OA = OB = OC = a$, BOC = 120 . Tìm bán kính hình cầu nội và ngoại tiếp tứ diện *OABC*.

☐ Hướng Dẫn: $R = a\sqrt{5}/2$, $r = 3V/S_{tp} = a\sqrt{3}\left(4+\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$

Bài 72 Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* cạnh đáy bằng a, góc của mặt bên và đáy bằng 60 . Dựng thiết diện với hình chóp đi qua *CD* và tạo với mặt phẳng đáy góc 30 .

1. Tìm diện tích thiết diện
2. Giả sử thiết diện cắt *SA*, *SB* tương ứng tại *N*, *M*. Tìm thể tích hình chóp tứ giác *S.CDNM*.

☐ Hướng Dẫn: $S = 3\sqrt{3}a^2/8$, $V = a^3\sqrt{3}/16$

Bài 73 Cho tứ diện *ABCD* có: $AB = AC = a$, $BC = b$, $(BCD) \perp (ABC)$, BDC = 90 . Xác định tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* theo a và b.

☐ Hướng Dẫn: $R = a^2 / \sqrt{4a^2 - b^2}$

Bài 74 Cho hình chóp tam giác *S.ABC*. Biết rằng tồn tại hình cầu tâm *O*, bán kính *R* (*O* nằm trên chiều cao hình chóp) tiếp xúc với cả sáu cạnh của hình chóp.

1. Chứng minh *S.ABC* là hình chóp đều
2. Cho $SC = R\sqrt{3}$. Tính chiều cao hình chóp.

☐ Hướng Dẫn: $SH = 4\sqrt{3}R / 9$

Bài 75 Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên bằng *b* ($b > a$). Một hình cầu tiếp xúc với mặt phẳng (*ABC*) tại *A* vì tiếp xúc với cạnh *SB*. Tìm bán kính hình cầu này.

☐ Hướng Dẫn: $R = a\sqrt{3}\left(2b - a\right) / 2\sqrt{3b^2 - a^2}$

Bài 76 Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* cạnh đáy bằng *a*. Gọi *E* là điểm đối xứng của điểm *D* qua trung điểm của *SA*. Gọi *M*, *N* tương ứng là trung điểm của *AE*, *BC*.

1. Chứng minh: $MN \perp BD$
2. Tìn khoảng cách theo a giữa hai đường thẳng *MN*, *AC*

☐ Hướng Dẫn: $d = a\sqrt{2} / 4$

Bài 77 Trong mặt phẳng (*P*) cho hình chữ nhật *ABCD*. Dựng đoạn $SA \perp (P)$. Qua *A* dựng mặt phẳng $(Q) \perp SC$. Mặt phẳng này cắt *SB*, *SC*, *SD* lần lượt tại *B'*, *C'*, *D'*.

1. Chứng minh $AB' \perp SB$, $AD' \perp SD$ và $SB'.SB = SC'.SC = SD'.SD$.
2. Gọi *I* là trung điểm của *SA*, còn *M*, *N* tương ứng là trung điểm của *AB*, *DC*. Chứng minh: $IB' \perp (B'MN)$.

☐ Hướng Dẫn:

Bài 78 Trong mặt phẳng (*P*) cho hình vuông *ABCD* cạnh bằng *a*. Dựng đoạn $SA = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$. Qua *A* dựng mặt phẳng $(Q) \perp SC$. Mặt phẳng (*Q*) cắt *SB*, *SC*, *SD* lần lượt tại *B'*, *C'*, *D'*.

1. Tìm thể tích hình chóp *S.AB'C'D'*
2. Chứng minh các điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *B'*, *C'*, *D'* cùng nằm trên một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu ấy.

☐ Hướng Dẫn: $V = a^3\sqrt{2} / 9$, $R = a\sqrt{2} / 2$